

$$\cos^2 x = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x \in \emptyset \end{cases}$$

k	o	۱	۲
x	$\frac{\pi}{\lambda}$	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda}$	$\pi + \frac{\pi}{\lambda}$

پس جواب‌های مورد قبول $\frac{\pi}{\lambda}$ و $\frac{5\pi}{\lambda}$ می‌باشند.

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

$$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$-1 \leq \sin(x + \pi) \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq \sin(x + \pi) + 2 \leq 3$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{1} \geq \frac{1}{\sin(x + \pi) + 2} \geq \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2 \geq \frac{2}{\sin(x + \pi) + 2} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow R_f = \left[\frac{2}{3}, 2\right]$$

فرض می‌کنیم دوره تناوب تابع $y = f(x)$ ، T باشد، در این صورت دوره تناوب تابع $y = f(\pi x + 2)$ برابر است با $\frac{T}{\pi}$.
از طرف دیگر طبق نمودار داده شده، دوره تناوب تابع $y = f(\pi x + 2)$ ، $\frac{2}{3}$ است. بنابراین:

$$\frac{T}{\pi} = \frac{2}{3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

حال دوره تناوب تابع $y = f\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ برابر می‌شود با:

$$2T = \frac{4\pi}{3}$$

توجه کنید می‌توان نمودار $y = f\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ را با کمک قوانین انتقال از روی نمودار $y = f(\pi x + 2)$ رسم کرد و از این طریق دوره تناوب تابع را به دست آورد.

$$y = a - b \sin\left(\frac{\pi}{2} + cx\right) = a - b \cos cx$$

باتوجه به نمودار، دوره تناوب $\frac{2\pi}{3}$ ، ماکزیمم ۴ و مینیمم -۱ است.

$$T = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |c| = 3 \Rightarrow c = \pm 3$$

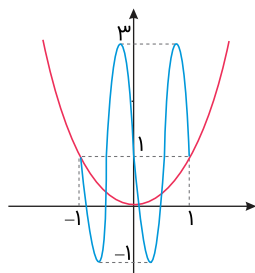
$$\begin{cases} \max y = 4 \\ \min y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + |b| = 4 \\ a - |b| = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2}, |b| = \frac{5}{2}$$

در این سؤال مقدار c هر دو عدد ۳ و -۳ می‌تواند باشد زیرا $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ است. اما در مورد علامت b دقت کنید چون $f(0) = 4$ است، پس $b < 0$ است، بنابراین $b = -\frac{5}{2}$ خواهد بود.

$$ab + c = \frac{3}{2} \times \frac{-5}{2} \pm 3 = -\frac{15}{4} \pm 3 = -\frac{3}{4} \pm 3$$

در نتیجه جواب سؤال $-\frac{6}{75}$ یا $-\frac{5}{75}$ خواهد بود.

دوره تناوب تابع f برابر است با $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. همچنین ماکزیمم و مینیمم تابع f برابر است با ۳ و -۱. حال دو تابع f و g را رسم می‌کنیم:



بنابراین در پنج نقطه متقاطع‌اند.

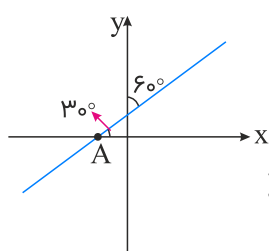
می‌دانیم شیب خط $y = mx + b$ برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد، یعنی $\tan x = m$. زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد 30° است، پس:

$$\tan 30^\circ = m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

درنتیجه معادله به فرم زیر خواهد بود.

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3}{9} + 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4}{3}$$

باتوجه به اینکه نقطه A روی محور x ها است، با قرار دادن $y = 0$ طول آن به دست می‌آید.



$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4}{3} \xrightarrow{y=0} x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

گزینه ۱: $1 \text{ Rad} \simeq 57/3^\circ$
گزینه ۲:

$$4 \text{ Rad} \simeq 229/2^\circ, \quad 5 \text{ Rad} \simeq 286/5^\circ \Rightarrow \tan 4 > \tan 5$$

ربع سوم
ربع چهارم

گزینه ۳:

$$1 \text{ Rad} \simeq 57/3^\circ \Rightarrow \cos 1^\circ > \cos 57/3^\circ$$

طبق نمودار تابع $T = 4\pi$ است و می‌دانیم $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ، بنابراین:

$$4\pi = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = a \cos\left(\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + c$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3 \Rightarrow a \cos\left(\frac{3\pi}{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + c = -3 \Rightarrow a \cos(\pi) + c = -3 \\ f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow a \cos\left(\frac{7\pi}{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + c = 1 \Rightarrow a \cos(2\pi) + c = 1 \end{cases}$$

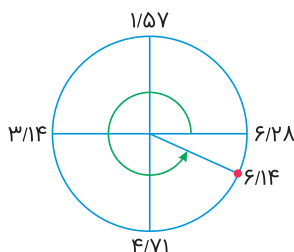
$$\Rightarrow \begin{cases} -a + c = -3 \\ a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1, a = 2$$

$$\Rightarrow abc = 2 \times \frac{1}{2} \times -1 = -1$$

از آنجایی که $\pi \simeq 3/14$ است پس:

$$\alpha = \pi + 3 \simeq 6/14 \text{ rad}$$

به دایره مثلثاتی زیر که بر حسب رادیان تقریبی تنظیم شده است توجه کنید:



ملاحظه می‌کنید که $6/18$ رادیان در ناحیه چهارم قرار دارد.

$$1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\overbrace{\frac{-47\pi}{24}}^{\text{ناحیه اول}} \leq \frac{\omega x}{3} - 3\pi \leq \overbrace{\frac{-29\pi}{18}}^{\text{ناحیه اول}}$$

$\sin$ در ناحیه اول صعودی است:

$$\sin\left(\frac{-47\pi}{24}\right) \leq \sin\left(\frac{\omega x}{3} - 3\pi\right) \leq \sin\left(\frac{-29\pi}{18}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{29\pi}{18}\right) \leq -\sin\left(\frac{\omega x}{3} - 3\pi\right) \leq \sin\left(\frac{47\pi}{24}\right)$$

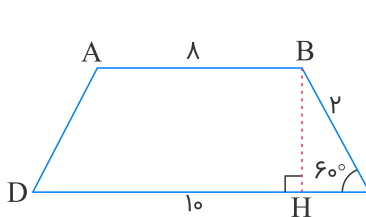
کمترین مقدار عبارت برابر است با:

$$2 - \sin\left(\frac{\omega x}{3} - 3\pi\right) = 2 + \sin \frac{29\pi}{18} = 2 - \sin \frac{7\pi}{18}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = -1 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = -1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \xrightarrow{x \in [0, \frac{11\pi}{6}]} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب ها} = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi$$



$$\triangle BHC : \sin 60^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{14} \Rightarrow BH = 7\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت} = \frac{(10 + 14) \times 10}{2} = 120$$

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - 7\pi\right) + \cos^2\left(\frac{49\pi}{6}\right) + \sin 110^\circ \\
 &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \pi\right) + \cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sin(6 \times 180^\circ + 30^\circ) \\
 &= -\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin 30^\circ = -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \\
 &= -1 + 0.75 + 0.5 = 0.25
 \end{aligned}$$

نکته: به ازای هر α ، همواره داریم: $|\sin \alpha| \leq |\tan \alpha|$. بنابراین نمودار تابع g در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ زیر نمودار f و در بازه $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ بالای f است.

نکته: $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$
اثبات:

$$\begin{aligned}
 \tan x + \cot x &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x} \\
 \tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 1 &= \frac{2}{\sin x} + \frac{1}{4} \sin x + 1 = 0 \\
 \Rightarrow \frac{2 + \frac{1}{4} \sin^2 x + \sin x}{\sin x} &= 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \\
 \Rightarrow \sin^2 x + 4 \sin x + 16 &= 0 \Rightarrow (\sin x + 4)^2 = 0 \\
 \Rightarrow \sin x = -4 \quad \text{غ.ق.ق} \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد.}
 \end{aligned}$$

$$\omega \sin x = 3 \cos x + 3 \Rightarrow \omega \sin x = 3(\cos x + 1)$$

$$\Rightarrow \omega \times 3 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} = 3(3 \cos^2 \frac{x}{3})$$

$$\xrightarrow[\cos \frac{x}{3} \neq 0]{\div 3 \cos^2 \frac{x}{3}} \omega \tan \frac{x}{3} = 3$$

$$\Rightarrow \tan \frac{x}{3} = \frac{3}{\omega} \Rightarrow \tan^2 \frac{x}{3} + 3 \tan \frac{x}{3} - 4$$

$$= \frac{9}{9\omega} + \frac{9}{\omega} - 4 = -\frac{46}{9\omega}$$